Enredo Cuántico

Guillermo García Alcaine*

Departamento de Física Teórica, Universidad Complutense, Madrid, 28040

Abstract

Entanglement is not *one* but rather *the* characteristic trait of quantum mechanics, asserted Schrödinger in 1935. Violation of Bell's inequalities in entangled states has supported this opinion ever since 1964. Recently found uses of entanglement sustain its current consideration as an important resource for practical applications.

I. INTRODUCCIÓN

Schrödinger usó el término *Verschränkung* para designar la superposición lineal de estados en sistemas de varias partículas (Schr 35). En la actualidad se utiliza la palabra inglesa *entanglement*, que puede traducirse al español por *enredo*, *entrelazamiento*, *entrecruzamiento*, *enmarañamiento*, *embrollo,* etc. Con estos términos se denota la propiedad de aquellos estados de un sistema compuesto (calificados como *verwickelten* en alemán, *entangled* en inglés, *enredados*, *entrelazados*, etc. en español) que contienen correlaciones cuánticas clásicamente inalcanzables.

Si el sistema total se encuentra en un estado puro (es decir, máximamente determinado), el *enredo* se manifiesta en que el estado total no puede expresarse como producto de estados para cada una de sus partes (desde el punto de vista matemático), y en que ninguna de dichas partes por separado se encuentra en un estado puro (desde el punto de vista físico) [1]. La caracterización del enredo para estados mezcla es más difícil, y será el objeto de la sección III.

El enredo cuántico es responsable de algunas de las propiedades más llamativas de la Mecánica Cuántica (QM en lo sucesivo) (Zei 98): contradicción con las teorías de Variables Ocultas deterministas (VO en lo sucesivo) Locales (Bell 64, vdMer 88, Per 93) o No-Contextuales (Cab 98), teleportación del estado para variables discretas (Benn 93, Gar 98, Vaid 98, Vaid 99a) o continuas (Vaid 94, Brau 98, Vaid 99a, vEnk 99), borrado cuántico con elección retardada (Kim 99), interferencia de varias partículas (Green 93), enredo entre dos cavidades con un sólo fotón (Gerry 96), aplicaciones en metrología (Mig 99), espectroscopía (Boll 96), litografía interferométrica (Boto 99), mejora de la relación señal-ruido (en relojes atómicos, detección de ondas gravitacionales, etc.) (Win 92, Win 94), etc. Mención especial merecen las aplicaciones del enredo en el campo de la información cuántica (Stea 98, Gal 00), incluyendo codificación densa (Benn 92a, Brau 99), comunicación cuántica (Cleve 97, Brieg 98, Buhr 99), superaditividad en la comunicación (Sas 98, Buck 99), criptografía cuántica (Ekert 91, Benn 92b, Titt 98), corrección de errores cuánticos (Shor 95, Stea 96), computación cuántica (DiVin

* Artículo publicado en la Revista Española de Física 19 (1), 17-29 (2000).

[1] Téngase en cuenta que si el estado reducido de un subsistema de un sistema compuesto es puro, es necesariamente un factor del estado total, sea éste puro o mezcla (Ball 90): la definición cuántica de estado reducido (parte del estado del sistema accesible a mediciones efectuadas sólo sobre el subsistema) se verá en el apartado III.B.2.

95, Benn 95, Deut 98), etc.[2] Muchas de las predicciones teóricas asociadas al enredo han sido ya comprobadas experimentalmente: la lista de referencias sería interminable, por lo que remito al lector a la reciente puesta a punto de Zeilinger (Zei 99).

En la sección II comentaré el ejemplo más importante de estado enredado, sus sorprendentes peculiaridades, y las consecuencias para la Física y la Filosofía; intentaré diferenciar los aspectos experimentales, teóricos, y de interpretación. En la sección III resumiré algunos criterios para caracterizar los estados enredados, limitándome esencialmente a la notación y las conclusiones de cada caso; el lector interesado en las demostraciones puede consultar las referencias incluidas; mi propósito en esta sección es informar sobre algunos de los problemas asociados con el enredo, muchos de ellos todavía no resueltos. La sección IV en cambio es autocontenida y exige sólo conocimientos básicos de QM para su comprensión. En ella expondré una nueva contradicción entre QM y VO puesta de manifiesto utilizando estados enredados; mi intención aquí es animar a los aficionados a la QM mostrando que todavía es posible encontrar nuevos resultados utilizando un aparato matemático muy humilde.

Quiero acabar esta introducción con un comentario acerca de la bibliografía incluida. Es imposible hacer justicia al gran número de trabajos relacionados con este tema (cientos sólo en los tres últimos años); en cada caso me he limitado a citar algún trabajo inicial, alguno reciente, y cuando ha sido posible, alguno en revistas como American Journal of Physics, Physics Today, Physics World o Revista Española de Física. Pido disculpas por las innumerables omisiones, que no responden a juicios de valor sino a la necesidad de limitar la extensión del trabajo.

II. EL ESTADO SINGLETE

A. Propiedades

Consideremos un sistema de dos partículas de espín 1/2 (en unidades en las que la constante de Plank reducida es la unidad, $\hbar = 1$). Las propiedades experimentales que caracterizan a un conjunto de sistemas en el estado singlete son las siguientes. (i) Si se mide una componente de espín de una de las dos partículas se obtiene $+1/2$ ó $-1/2$ con igual probabilidad, cualquiera que sea la dirección elegida: los estados reducidos son totalmente despolarizados. (ii) Si se miden las componentes de espín de las dos partículas en una misma dirección (arbitraria, pero igual para las dos) se encuentran siempre valores opuestos: existe una correlación negativa perfecta entre ambos espines. Estas propiedades son independientes de cualquier modelo teórico [3].

Las mediciones de una componente de espín de cada partícula pueden efectuarse en puntos separados por intervalos de género espacio, en cuyo caso no pueden influirse mutuamente si se acepta la *causalidad Einsteiniana*. A partir del resultado obtenido para la primera en una dirección cualquiera puede predecirse con certeza el resultado que se obtiene si se mide la correspondiente componente de espín de la segunda (la forma de confirmar experimentalmente esta correlación se discutirá en la nota a pie de página [4]). La componente que se mide para la primera partícula puede elegirse libremente (o mediante algún procedimiento

---

[2] Las aplicaciones del enredo justifican la conclusión de Gisin y Popescu (quant-ph/9901072): el papel del enredo es, no el de una fuente de paradojas, sino el de un medio para realizar tareas que son imposibles clásicamente.

[3] El suministrador de sistemas físicos en el estado singlete puede ser una caja negra, cuyo funcionamiento interno no es preciso conocer en orden a comprobar las dos propiedades definitorias del singlete.

aleatorio), sin que ello pueda influir en la medición sobre la segunda partícula si ésta tienen lugar en una región espacialmente separada. Esto sugiere que todas las componentes de espín de la segunda partícula tienen valores bien definidos antes de efectuar ninguna medida sobre dicha partícula, según la definición de *elementos de realidad* de EPR (Eins 35, Ball 90) tomada en sentido amplio (también llamado débil) (Clau 78, Cab 97). Otro tanto puede decirse para las componentes de espín de la primera partícula. Éste es el modelo del singlete con VO Locales.

En QM el singlete es un estado puro de espín total cero (simetría esférica), representado matemáticamente por el vector

$$|\psi_{-}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left\{|\uparrow\downarrow\rangle - |\downarrow\uparrow\rangle\right\} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left\{|\uparrow\rangle^{(1)} \otimes |\downarrow\rangle^{(2)} - |\downarrow\rangle^{(1)} \otimes |\uparrow\rangle^{(2)}\right\},$$

donde $|\uparrow\rangle^{(j)}$, $|\downarrow\rangle^{(j)}$ representan los estados de espín de la partícula $j = 1,2$ con componente +1/2 y - 1/2, respectivamente, en una dirección z dada (la elección de dirección z es arbitraria debido a la simetría esférica del estado). Este estado no es expresable como producto de un estado para la primera partícula por un estado para la segunda, como es fácil de comprobar explícitamente.

B. Comparación de los modelos del singlete

Para que la existencia de elementos de realidad parezca aun más inevitable, voy a proponer un ejemplo clásico aparentemente similar. Tres amigos, Alice, Bob y Carol participan en el siguiente juego: Carol prepara un rectángulo de papel blanco y un círculo de tela negra. Introduce el primero en un sobre opaco dirigido a Alice y el segundo en otro sobre dirigido a Bob, y ambos sobres en uno mayor sin ninguna marca. A continuación prepara un rectángulo de papel negro y un círculo de tela blanca, dirige el primero a Alice, el segundo a Bob, e introduce ambos en otro sobre. Hace lo mismo con un rectángulo de tela blanca y un círculo de papel negro,.. y así hasta completar las ocho parejas (ordenadas) con forma, material y color distintos para los dos objetos de cada pareja. Baraja después los ocho sobres externos, elige uno sin saber qué combinación contiene, lo abre, y envía a Alice y Bob las cartas respectivas.

Al recibir Alice su carta, manda abrirla sin ver su contenido y pregunta por una de las propiedades del objeto recibido. Supongamos que pregunta por la forma y que ésta resulta ser un rectángulo. Alice ignora el material y el color del objeto que ha recibido, pero predice que el que recibe Bob es un círculo. Bob por su parte procede de forma similar.

El juego se repite muchas veces. Cuando Alice y Bob comparan posteriormente sus resultados, comprueban que hay una correlación perfecta entre las respuestas obtenidas para una pareja dada si ambos han preguntado por la misma propiedad. Así, si los dos preguntaron por la forma, a uno le informaron de que era un rectángulo y al otro de que era un círculo; si preguntaron por el material, uno era de papel y el otro de tela, etc.[4] Este resultado era inevitable, teniendo en cuenta cómo han sido preparadas las parejas de sobres.

[4] La correlación perfecta entre las componentes de espín de las dos partículas en una misma dirección en el estado singlete se confirma precisamente de esta forma. Para cada pareja de partículas, las componentes de espín que Alice y Bob miden se eligen independiente y aleatoriamente entre un conjunto de direcciones dado. La elección puede hacerse cuando las partículas están a punto de llegar a sus respectivos aparatos de medida, para que las dos partes del experimento estén separadas por intervalos de género espacio y no exista posibilidad de comunicación entre ellas. El proceso se repite en un gran número de sistemas físicos en el estado singlete. Posteriormente, Alice y Bob comparan sus resultados y comprueban que en los casos en que ambos midieron en la misma dirección, los resultados obtenidos fueron siempre opuestos. La aleatoriedad en la elección de las direcciones en las que se mide y

Las tres características de cada objeto (forma, material y color) están bien definidas en cada jugada antes de abrir los sobres respectivos (son elementos de realidad), pero las reglas que he impuesto permiten a cada jugador preguntar por una sola de ellas.

Vuelvo ahora al sistema de dos partículas en el estado singlete. Una característica esencial del proceso de medición de espines es la imposibilidad de medir simultáneamente dos o más componentes de espín de una misma partícula. Sin embargo, el que para cada partícula pueda medirse sólo una componente de espín no prohibe en principio que todas ellas puedan tener valores bien definidos antes de la medición. A este respecto, el modelo del singlete <u>con VO Locales</u> no difiere esencialmente del juego con los dos sobres.

El modelo <u>cuántico</u> del singlete es muy diferente. Hasta el momento de su medición, ninguna componente de espín de cualquiera de las dos partículas tiene un valor definido.

Para que esto sea posible es necesario que pueda prepararse el estado enredado $|\psi_-\rangle$, superposición lineal con signo negativo de los estados $|\uparrow\rangle^{(1)} \otimes |\downarrow\rangle^{(2)}$, $|\downarrow\rangle^{(1)} \otimes |\uparrow\rangle^{(2)}$. La QM dice que $|\psi_-\rangle$ es el estado de las dos partículas con espín total cero, y que es experimentalmente posible prepararlo.

En cambio, no se saben construir superposiciones lineales de estados para objetos macroscópicos como los pares de sobres del juego: esta es la diferencia esencial entre pares de sobres y pares de partículas en el estado singlete cuántico. A escala macroscópica no existen estados enredados, ni se dan por tanto las curiosas propiedades asociadas con ellos. En particular, nuestra intuición de que las propiedades de los objetos están bien definidas antes de que las observemos es resultado de nuestra experiencia con objetos macroscópicos y <u>puede</u> no ser universalmente válida.

Los dos modelos del singlete, el que utiliza VO Locales y el cuántico, son pues esencialmente diferentes. El primero es próximo a nuestra experiencia cotidiana (la medición descubre valores preexistentes) y al *realismo* filosófico (creencia en una realidad externa, independiente de los procesos de observación). El segundo es más económico (no postula la existencia de valores simultáneamente bien definidos para propiedades que no pueden medirse simultáneamente) y próximo al *positivismo* (la Física se ocupa sólo de las propiedades medidas; el resto es Metafísica).

El valor de una componente de espín se conoce sólo si se mide, sin que pueda discernirse si estaba predefinido o no. Por su parte, el que no sea posible preparar conjuntos de sistemas físicos en un estado libre de dispersión simultáneamente para más de una componente de espín no implica que los sistemas individuales no puedan tener bien definidas varias componentes distintas. La elección entre uno y otro modelo fue pues durante mucho tiempo una cuestión de preferencias filosóficas, sin posible contraste experimental.

C. Desigualdades de Bell

---

la imposibilidad de comunicación entre ambas partes excluyen cualquier "conspiración" de los dispositivos experimentales para correlacionar ambos resultados.

El mismo procedimiento sirve para medir correlaciones en general (no perfectas) entre componentes de espín diferentes para las dos partículas. Así pueden analizarse experimentalmente las desigualdades de Bell de las que se hablará más adelante.

La situación anterior se prolongó hasta que en los años sesenta John S. Bell descubrió que los valores medios de productos de una componente de espín de la primera partícula y una de la segunda deben de satisfacer ciertas desigualdades si existen VO Locales, y que esta predicción puede someterse a comprobación experimental mediante mediciones efectuadas en un gran número de sistemas físicos igualmente preparados (Bell 64); la medición puede hacerse como se indicó en la nota [4]. H. P. Stapp ha calificado este resultado como el más profundo de los descubrimientos científicos. Ciertamente representa un hito en la Física y la Filosofía de la Ciencia, y su análisis, extensión, comprobación experimental e implicaciones han sido objeto de innumerables publicaciones [5] y encendidas controversias.

Una deducción sencilla de la desigualdad original de Bell utilizando argumentos de teoría de conjuntos y la existencia de valores bien definidos para varias componentes de espín de una misma partícula puede verse en (d'Esp 79). En (Ryff 97) se da una deducción que incluye la posibilidad de errores en la detección de las correlaciones. Un resumen reciente de la vida, la filosofía y la relevancia de las contribuciones científicas de J. S. Bell puede encontrarse en (Whit 98).

Posteriormente se han descrito múltiples generalizaciones y mejoras de la desigualdad original, colectivamente llamadas desigualdades de Bell: véanse por ejemplo (Clau 78, vdMer 88, Ball 90, Sell 90, Brau 90, Per 99a, Per 99b), por citar sólo una breve selección. Una de las más utilizadas es la llamada desigualdad de CHSH (Clau 69), que puede escribirse (Per 96b) como

$$\left| \langle AB \rangle_\rho + \langle AB' \rangle_\rho + \langle A'B \rangle_\rho - \langle A'B' \rangle_\rho \right| \leq 2, \quad \forall\, \rho, A, A', B, B',$$

donde $\langle C \rangle_\rho$ representa el valor medio de un observable C en el estado ρ, A, A' son dos observables no compatibles entre si medidos (uno u otro) en el primer subsistema, y B, B' otros dos observables no compatibles medidos (también alternativamente) en el segundo subsistema. Los cuatro operadores correspondientes están normalizados a la unidad (la norma de un operador es el mayor de los valores absolutos de sus autovalores). En la demostración original de CHSH los cuatro observables eran componentes de espín de dos partículas de espín 1/2, pero para su aplicación a otros casos es necesario generalizarla. En cualquier teoría con VO Locales la desigualdad anterior debe cumplirse cualquiera que sea el estado ρ del sistema y los cuatro observables A, A', B, B'.

Los observables y los estados pueden elegirse de forma que las predicciones concretas de la QM violen las desigualdades de Bell. Las VO Locales (y en particular los aparentemente irrebatibles Elementos de Realidad de EPR) no son pues una forma de completar la QM como Einstein esperaba, sino una teoría alternativa incompatible con ella. Una de las dos (al menos) debe ser falsa: la palabra la tienen los experimentos.

D. Más allá del singlete

La incompatibilidad entre QM y VO Locales se conoce como *Teorema de Bell*; las violaciones de las distintas desigualdades de Bell por la QM son demostraciones del teorema. Existen también contradicciones de tipo no-estadístico, como las de GHZ (Green 90, Mer 90a,

[5] Probablemente (Bell 64) sea el la referencia física más citada.

Ryf 97, Vaid 99b), Mermin y Peres (Mer 90b, Per 90, Mer 93) y Hardy (Hard 92, Mer 94). Estas fascinantes demostraciones del teorema de Bell muestran la incompatibilidad total a nivel teórico entre VO Locales y QM, de una forma más rotunda que las desigualdades de Bell, pero hasta ahora no han dado lugar a experimentos más decisivos

Resulta interesante comparar la capacidad de convicción experimental de las distintas demostraciones del teorema de Bell. Asher Peres ha propuesto (Per 99a) analizar el número de mediciones necesarias según el teorema de Bayes, en un experimento ideal, para invalidar el *realismo local* al nivel de confianza que se desee. Este *factor de decrecimiento de la confianza* en las variables ocultas, D, es un indicador de la potencia teórica de las diferentes desigualdades de Bell. Peres compara experimentos ideales basados en la desigualdad de Mermin (Mer 90a) para el estado de GHZ-Mermin, $\frac{1}{\sqrt{2}}\left\{\left|\uparrow\uparrow\uparrow\right\rangle-\left|\downarrow\downarrow\downarrow\right\rangle\right\}$, con los basados en las desigualdades de CHSH o sus generalizaciones (Brau 90) para el singlete, o en el argumento de incompatibilidad de Hardy para estados no-máximamente enredados como el $\frac{1}{\sqrt{3}}\left\{\left|\uparrow\uparrow\right\rangle-\left|\uparrow\downarrow\right\rangle-\left|\downarrow\uparrow\right\rangle\right\}$. La conclusión es que la desigualdad de Mermin permitiría en principio alcanzar un gran factor D mucho más rápidamente que las otras desigualdades ($D=10^4$ en 32 mediciones, frente a más de 200 mediciones en los otros casos), aunque los experimentos reales con tres partículas sean más difíciles de realizar que con dos.

La teleportación cuántica (que exige la utilización de estados enredados) proporciona otros posibles experimentos en contra de las VO (Zuk 99b). Si la fidelidad de la teleportación es suficientemente alta, sus resultados no pueden ser reproducidos por ningún modelo de VO Locales. Esta fidelidad no ha sido aun conseguida en sistemas de dimensión finita (espines, polarizaciones de fotones, átomos con un pequeño número de niveles de energía relevantes, etc.), pero puede haberse logrado ya para sistemas de dimensión infinita, concretamente en la teleportación de *estados coherentes* utilizando *estados estrujados* (*squeezed states*) enredados (Furu 98).

Es posible producir enredo entre partículas que nunca han estado en contacto (Yur 92a, Yur 92b); ello puede permitir nuevas comprobaciones de (la violación de) las desigualdades de Bell (Zuk 93). Una forma posible es la siguiente (Vaid 99b): cada una de las partículas del singlete, de uno de los estados de Hardy, o del estado de GHZ-Mermin, se somete a un proceso de teleportación de su estado, trasladando su enredo (*entanglement swapping*) a otra partícula alejada del origen común de las partículas enredadas iniciales. En el caso ideal de teleportación perfecta las partículas finales se encuentran en el mismo estado enredado que las de partida. Incluso teniendo en cuenta las imperfecciones en la teleportación o la baja eficiencia de los detectores, no parece fácil reproducir las predicciones cuánticas para un experimento de este tipo en términos de VO Locales: en particular, no es posible una asignación de conjuntos de instrucciones previas, dado que las partículas no han estado en contacto en el pasado ni se han comunicado (Vaid 99b).

De momento este tipo de experimentos debe considerarse como *gedanken*(pensados), ya que combinan las dificultades prácticas de la teleportación con las de la comprobación ordinaria de las desigualdades de Bell. Por ejemplo, en el experimento propuesto por Vaidmann sería necesario realizar medidas sobre cada una de las tres partículas alejadas (cada una de ellas miembro inicialmente de un par en el estado singlete), y sobre cada uno de los tres pares compuestos por la otra partícula de cada singlete y una de las tres partículas del estado de GHZ-Mermin inicial [6].

E. Experimentos e interpretaciones

La realización práctica de experimentos para confirmar o rechazar las predicciones de las VO y la QM no es sencilla. La mayoría de quienes se han interesado por el tema opinan que los ya publicados han resuelto a efectos prácticos el dilema a favor de la QM. Una minoría ha insistido durante años en que ninguno de los experimentos realizados hasta la fecha es decisivo y que todos ellos contienen escapatorias (*loopholes*) que impiden concluir lo anterior. Sus objecciones son hoy aceptadas (Gis 99, Lars 99), después de mucho tiempo de ser considerados como heterodoxos [7]. La mayoría opina sin embargo que es sólo cuestión de tiempo el que experimentos más precisos excluyan totalmente estas escapatorias.

La escapatoria más importante (el llamado *detection loophole*) viene proporcionada por la baja eficiencia de los detectores, que permite que los resultados para la fracción de sucesos detectados sean reproducibles mediante VO Locales [8]. Como se lee en (Gis 99), es fastidioso que en 30 años no se haya podido cerrar esta escapatoria, aunque estén en marcha experimentos para conseguirlo. Por otra parte, los experimentos de teleportación de estados coherentes (Furu 98) podrían ser el primer rechazo experimental sin *loopholes* de las VO Locales.

La eficiencia mínima para excluir las VO Locales sin recurrir a hipótesis adicionales como las de *no-aumento* (*no-enhancement*) o *muestreo fiel* (*fair sampling*) ha sido estudiada para las distintas desigualdades de Bell, por ejemplo, la desigualdad de CHSH en el singlete (Garg 87), o el estado de GHZ-Mermin (Lars 98, Vaid 99b); este último caso resulta más favorable (menor eficiencia exigida), a pesar de que el hecho de utilizar tres detectores en vez de dos parecería sugerir lo contrario. Este resultado, junto con el de Peres para el factor de decrecimiento de la confianza en las variables ocultas en experimentos ideales, sugiere que los experimentos en estados con más de dos partículas (el de GHZ-Mermin con tres, el original de GHZ con cuatro u otros) presentan ventajas apreciables a pesar de la mayor complejidad para su realización; otros datos apuntan en la misma dirección (Zuk 99a).

Las consecuencias de la violación de las desigualdades de Bell siguen debatiéndose. La mayoría de quienes se interesan por el tema pone el énfasis en la exclusión de las VO, o de lo que genéricamente se suele llamar *Realismo*. Otros autores, entre ellos el difunto J. S. Bell, enfatizan el rechazo de la Localidad, entendiendo que las VO siguen siendo deseables, pero deben ser no-locales.

De un modo general (y a menudo impreciso) suele hablarse de la no-localidad de la QM. Recientemente se ha discutido si ello está justificado: la opinión general es negativa (Unruh 99,

---

[6] Una de las peculiaridades de esta propuesta, que la distingue de las teleportaciones usuales, es que todas las medidas pueden efectuarse al mismo tiempo, y no es necesaria la comunicación clásica entre los puntos en que se mide el estado de cada par y la partícula alejada correspondiente, para instruir al observador allí situado acerca de la rotación que debe aplicar a su partícula (Gar 98). Aquí no se practica ninguna rotación, y a pesar de ello las correlaciones entre las tres partículas alejadas (que como de costumbre se comprueban a posteriori) son las mismas que en el estado de GHZ-Mermin (Vaid 99).

[7] Su contribución ha sido importante para no cerrar en falso el debate otra vez, como se hizo tras el teorema de von Neumann (Bell 66).

[8] Por ejemplo, haciendo que la eficiencia de los detectores dependa de las variables ocultas (Gis 99), o mediante los llamados *conjuntos de instrucciones previas* (Vaid 99b).

Mer 98, Mer 99). En (Vaid 99b) se concluye: “parece que el significado de la no-localidad de la teoría cuántica no va más allá de la no-existencia de VO Locales”. Por su parte, en (Gis 99) se lee: “ La teoría cuántica es no-local en el sentido en que predice correlaciones entre resultados en sistemas distantes que no pueden ser explicadas por ningún modelo basado sólo en variables locales. Dado que los resultados son estocásticos, no pueden utilizarse para transmitir señales. De aquí que a pesar de esta no-localidad, no exista conflicto directo con la Relatividad” [9].

Concluyo esta sección recordando que las VO que aparecen en todo este artículo son *deterministas*: los valores ocultos de los observables en un sistema individual son los resultados que se obtendrían en la medición de los correspondientes observables en dicho sistema. Aunque rara vez consideradas, se han propuesto también variables ocultas *estocásticas* (Bell 71, Sell 90, Roy 93), cuya relación con los resultados de las medidas es sólo probabilística, y que también conducen a contradicciones con la QM si se mantiene la localidad o la no-contextualidad. Existen también variables ocultas no-locales como las de la teoría de Bohm (Bohm 52, Belin 73, Gold 98), de las cuales J. S. Bell era un firme defensor; quedan fuera del objetivo de este artículo, a pesar de su interés y de ser compatibles con la QM.

III. IDENTIFICACIÓN DEL ENREDO

En el apartado anterior mostré un ejemplo de enredo cuántico en su variedad más sencilla: dos subsistemas de dimensión dos en un estado total puro. A partir de aquí deberían considerarse entre otros los siguientes puntos: Generalización a dos subsistemas de dimensiones arbitrarias (finitas) en un estado total no necesariamente puro. Búsqueda de medidas del enredo de un estado cualquiera, de su distancia al estado separable más próximo y de la abundancia de estados separables y enredados en el espacio de Hilbert de los estados. Generalización a sistemas con más de dos partes y al caso de variables continuas en espacios de Hilbert de dimensión infinita. Estudio de la fragilidad del enredo en presencia de ruido, o bajo mediciones sobre parte del sistema. Preparación experimental de estados enredados concretos de dos o más partículas, en dimensión finita o infinita, con vistas a sus aplicaciones prácticas.

Cada una de las etapas de este programa presenta dificultades propias, algunas no resueltas todavía. Ante la imposibilidad de un tratamiento completo, me limitaré esencialmente al problema de la distinción entre estados separables y enredados en sistemas con dos partes,

---

[9] Un conflicto con la Relatividad, concretamente con la causalidad Einsteiniana, se manifestaría si fuese posible utilizar las correlaciones cuánticas para transmitir señales a velocidades mayores que las de la luz en el vacío. La ausencia de señales superlumínicas ha sido llamada “simple locality” (Ball 87) o “signal locality” (Roy 91); en este sentido la QM es Local (Ball 87, Gar 87). Este tipo de localidad puede formularse independientemente de la teoría cuántica y conduce también a condiciones que podrían ser experimentalmente comprobadas (Ball 87, Roy 89, Roy 91). Una violación experimental de dichas condiciones implicaría un rechazo de la Relatividad Restringida, la QM y la Teoría Cuántica de Campos (lo cual es áltamente improbable y explica el poco entusiasmo por realizar el experimento).

Respecto al “colapso instantaneo” de la función de onda, que a veces se interpreta como algún tipo de "efecto inmediato" o "cambio instantaneo", resumo a continuación los comentarios en (Brau 90): La función de onda es un instrumento matemático, un almacén de información sobre el sistema físico. Cuando se observa un sistema y se obtiene nueva información, hay que descartar las partes de la función de onda que son inconsistentes con los nuevos datos. La situación es similar a lo que ocurre en el análisis Bayesiano de las probabilidades: si se aprende algo nuevo sobre el sistema, hay que cambiar las probabilidades para que sean consistentes con los nuevos datos. En Teoría de Probabilidades, este “colapso de la probabilidad” se llama Teorema de Bayes.

El único inconveniente de la acertada descripción anterior es que sugiere que el estado del sistema es algo subjetivo, ligado al conocimiento que un observador concreto tiene sobre él, y no una propiedad objetiva del sistema, ligada al <u>máximo</u> conocimiento que pueda llegar a tenerse; remito al lector a las dos primeras notas a pié de página en (Gar98).

con unos breves comentarios finales sobre tipos de enredo y medidas del mismo. La identificación del enredo ha adquirido mayor importancia desde que éste ha dejado de ser una rareza cuántica y se ha convertido en un *recurso* utilizable en aplicaciones de gran interés practico clásicamente imposibles (teleportación, comunicación cuántica, computación cuántica, etc.). De hecho, sólo el llamado *enredo libre* o *destilable* (*free* or *distillable entanglement*) es utilizable para estos fines, mientras que el llamado *enredo ligado* (*bound entanglement*) no es aprovechable, como comentaré al final de esta sección.

A. Estado total puro

Para un sistema compuesto por dos subsistemas, los estados puros factorizables, $|\Psi\rangle = |\psi\rangle^{(1)} \otimes |\varphi\rangle^{(2)}$, satisfacen todas las desigualdades de Bell y admiten una descripción en términos de VO Locales. Por el contrario, los estados puros enredados no son factorizables, y todos ellos violan alguna desigualdad de Bell (Gis 92). Más adelante indicaré cómo la entropía proporciona otra distinción fácil de comprobar. En el caso de estado total puro, la diferencia entre ambas clases de estados es sencilla y tajante.

Una clasificación más fina puede conseguirse analizando la descomposición biortogonal de Schmidt (Per 93). Es evidente que todo estado total puro puede escribirse como $|\Psi\rangle = \sum_{i,j} \alpha_{ij} \left|u_i\right\rangle^{(1)} \otimes \left|w_j\right\rangle^{(2)}$, donde $\left\{\left|u_i\right\rangle^{(1)}\right\}$, $\left\{\left|w_j\right\rangle^{(2)}\right\}$ son bases en cada una de las dos partes del sistema total. Pues bien, para cada estado total puro existe al menos un par de bases ortogonales $\left\{\left|a_i\right\rangle^{(1)}\right\}$, $\left\{\left|b_i\right\rangle^{(2)}\right\}$, tales que

$$|\Psi\rangle = \sum_{i=1}^{k} z_i \left|a_i\right\rangle^{(1)} \otimes \left|b_i\right\rangle^{(2)},$$

donde k se llama el rango de Schmidt del estado puro $|\Psi\rangle$ y es siempre menor o igual que la menor de las dimensiones de los espacios de Hilbert de los dos subsistemas. Nótese que la descomposición de Schmidt implica una correlación perfecta entre cada pareja de valores (a_i, b_i).

Si $k = 1$, el estado es factorizable. Si $k > 1$ el estado es enredado: si además los módulos de todos los coeficientes son distintos, la descomposición es única. Finalmente, si $k > 1$ y los módulos de dos o más coeficientes son iguales, existen infinitas descomposiciones de Schmidt posibles, y el estado se llama *máximamente enredado*. Los estados máximamente enredados violan máximamente las desigualdades de CHSH (Kar 95) [10], y presentan infinitas correlaciones perfectas entre las dos partes del sistema total.

El singlete es el ejemplo más importante de estado máximamente enredado. Puede expresarse como combinación lineal de estados con espines opuestos en una dirección **n** cualquiera, $|\psi_-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \left\{ |\uparrow\rangle_{\mathbf{n}} |\downarrow\rangle_{\mathbf{n}} - |\downarrow\rangle_{\mathbf{n}} |\uparrow\rangle_{\mathbf{n}} \right\}$, lo que da lugar a una correlación perfecta entre las componentes de espín de las dos partículas en una misma dirección, cualquiera que sea ésta.

[10] El recíproco no es cierto: la violación máxima de las desigualdades de CHSH no exige que el estado sea puro máximamente enredado; existen estados mezcla que violan máximamente la desigualdad (Brau 92).

B. Estado total no-puro

La situación es mucho menos clara. El concepto de factorizabilidad no es suficiente, y se necesita una definición más general de *separabilidad* (como propiedad opuesta al enredo). Se dice que un estado (no-puro en general) es *separable* (Wer 89), si su operador estado ρ puede expresarse como combinación lineal convexa de productos de operadores estado para cada una de las dos partes,

$$\rho = \sum_k c_k \; \rho_k^{(1)} \otimes \rho_k^{(2)}, \;\; 0 \le c_k \le 1 \; , \; \sum_k c_k = 1 \, .$$

Werner llamó *clásicamente correlacionados* a estos estados, por oposición a los cuánticamente correlacionados (enredados). En particular, si el estado total es puro, la suma anterior tiene un sólo término [11], y se recupera la condición de factorizabilidad.

Para estados no-puros la distinción entre estados separables (clásicamente correlacionados) y estados no-separables (cuánticamente correlacionados, es decir enredados) no está totalmente resuelta. Se conocen diversas condiciones necesarias para que un estado sea separable, pero sólo para los espacios de dimensión más baja (4 ó 6) se conocen condiciones suficientes. Voy a analizar brevemente alguno de estos criterios de separabilidad.

1. Verificación de las desigualdades de Bell

Una condición necesaria para la separabilidad y para la existencia de un modelo de VO Locales es que se satisfagan todas las desigualdades de Bell, y en particular las de CHSH para cualquier conjunto de observables A, A', B, B'. En ciertos casos se conocen condiciones necesarias y suficientes para que dichas desigualdades se verifiquen (Horo 95).

La verificación de las desigualdades de CHSH no es suficiente para la separabilidad: existen operadores estado ρ que las cumplen, y sin embargo contienen correlaciones cuánticas (Wer 89), que pueden utilizarse para fenómenos específicamente cuánticos como la teleportación (Pop 94). Estas correlaciones dan lugar a violaciones del realismo local si se consideran secuencias de mediciones (Pop 95).

Condiciones necesarias más fuertes para la separabilidad pueden conseguirse mediante pruebas colectivas (Per 96b), analizando conjuntamente varias copias del sistema total, $\rho \otimes \rho$, $\rho \otimes \rho \otimes \rho$, etc. (cada ρ es el operador estado del sistema compuesto cuya separabilidad queremos estudiar). Aunque ρ satisfaga todas las desigualdades de CHSH, mediante operaciones locales efectuadas por Alice y Bob sobre sus respectivos conjuntos de subsistemas es posible seleccionar subconjuntos que las violan. El protocolo de mediciones colectivas propuesto por Peres difiere de los de purificación o destilación del enredo propuesto por otros autores.

2. Entropía de von Neumann

La entropía de von Neumann se define como

---

[11] La matriz densidad para un estado puro no puede expresarse como mezcla convexa de matrices densidad distintas (Ball 90).

$$S(\rho) = -\operatorname{Tr}\{\rho \ln \rho\} = -\sum_j p_j \ln p_j ,$$

donde los pesos p_j son los autovalores de ρ, $0 \le p_j \le 1$, $\sum_j p_j = 1$.

La entropía de von Neumann distingue entre estados puros (máximamente determinados, entropía nula) y estados no-puros ($0 < S(\rho) \le \ln N$, siendo N la dimensión del espacio de Hilbert). En trabajos relacionados con teoría de la información es usual sustituir el logaritmo neperiano por el logaritmo en base 2; la diferencia es un simple factor numérico (ln 2 = 0,693).

La entropía de von Neumann de un sistema con dos partes satisface la desigualdad triangular de Araki-Lieb (Ara 70), que en particular incluye la subaditivad (Wehrl 78):

$$\left|S\left(\rho^{(1)}\right) - S\left(\rho^{(2)}\right)\right| \le S(\rho) \le S\left(\rho^{(1)}\right) + S\left(\rho^{(2)}\right) = S\left(\rho^{(1)} \otimes \rho^{(2)}\right),$$

donde $\rho^{(1)}, \rho^{(2)}$ son los operadores estado reducidos de cada una de sus dos partes, obtenidos calculando la traza parcial de ρ sobre la otra parte. Así, $\rho^{(1)} = \operatorname{Tr}^{(2)} \rho = \sum_j \langle b_j | \rho | b_j \rangle$, siendo $\{|b_j\rangle\}$ una base en el espacio de Hilbert del segundo subsistema; es decir, $\langle a_m | \rho^{(1)} | a_n \rangle = \sum_j \langle a_m b_j | \rho | a_n b_j \rangle$.

Una cantidad interesante es la *entropía mútua* o *información mútua* de von Neumann, llamada también *índice de correlación* (Barn 91), $I = S\left(\rho^{(1)}\right) + S\left(\rho^{(2)}\right) - S(\rho)$, que según las desigualdades de Araki-Lieb satisface $0 \le I \le 2 \min\left\{S\left(\rho^{(1)}\right), S\left(\rho^{(2)}\right)\right\}$. El máximo alcanzable es doble que en el caso clásico; el factor 2 aparece también en otras comparaciones entre información cuántica y clásica.

Si el estado total es puro su entropía es nula, y se puede definir la llamada *entropía de enredo*, $E_E = S\left(\rho^{(1)}\right) = S\left(\rho^{(2)}\right) = I/2$, que es una medida del mismo. Si $I = 0$ los estados reducidos son ambos puros y el estado total es factorizable (entropía de enredo nula). Si $I > 0$ ambos estados reducidos son no-puros y el estado total es enredado (entropía de enredo mayor que cero). En el caso de estado total puro, éste es un criterio sencillo para distinguir ambos tipos de estados.

Si el estado es mezcla, y su operador estado es factorizable, es decir, producto tensorial de estados para cada una de las partes, $\rho = \rho^{(1)} \otimes \rho^{(2)}$, la entropía total es también igual a la suma de las entropías de los estados reducidos, y el índice de correlación es nulo, $I = 0$. Pero en el caso $I > 0$ no es posible distinguir con sólo este dato si el estado es mezcla convexa de varios productos tensoriales distintos (separable), o no. Ello ha llevado a estudiar el comportamiento de otras entropías, como la de Rényi o la de Tsallis.

3. Otras entropías

La α-entropía de Rényi puede extenderse al caso cuántico (Thir 83, Horo 96a) como

$$S_\alpha(\rho) = \frac{1}{1-\alpha} \ln \mathrm{Tr}\ \rho^\alpha = \frac{1}{1-\alpha} \ln \sum_j p_j^\alpha\ , \quad \alpha > 1\,.$$

Para ciertos valores de α la entropía de Rényi está relacionada con otras cantidades conocidas. Para $\alpha \to 1$ tiende a la entropía de von Neumann (Thir 83). Para α=2, $S_2(\rho) = \ln R(\rho)$, donde $R(\rho) = \{Tr(\rho^2)\}^{-1}$ es la llamada *razón de participación*, que es otra estimación del grado de mezcla del estado ($1 \le R(\rho) \le N$, con $R(\rho) = 1$ para estados puros y $R(\rho) = N$ para los máximamente despolarizados, $\rho = \frac{1}{N}\mathbf{I}$). Para $\alpha \to \infty$ tiende a $S_\infty = -\ln\|\rho\|$, donde $\|\rho\|$ es la norma del operador estado (el mayor de sus autovalores).

Para sistemas clásicos discretos las α-entropías condicionales son positivas (Horo 96b) [12]. Esto sugiere que sus correspondientes expresiones cuánticas,

$$S_\alpha(1|2) = S_\alpha(\rho) - S_\alpha\left(\rho^{(2)}\right), \quad S_\alpha(2|1) = S_\alpha(\rho) - S_\alpha\left(\rho^{(1)}\right),$$

serán positivas si el estado es separable [13]. Ello equivale a que para todo $\alpha \ge 1$ se satisfagan las siguientes desigualdades entrópicas:

$$S_\alpha(\rho) \ge \max\ \left\{S_\alpha\left(\rho^{(1)}\right), S_\alpha\left(\rho^{(2)}\right)\right\}.$$

La violación de alguna de estas desigualdades es una manifestación de características no-clásicas, y por tanto de no-separabilidad. Si el estado total es puro, es fácil ver que esto es así: la α-entropía total es nula para todo α, y el que el segundo miembro sea también nulo o positivo, depende de que los estados reducidos sean puros o no (estado total factorizable o enredado, respectivamente). Para $\alpha = 1$, $\alpha = 2$ y $\alpha = \infty$ puede probarse que en espacios de Hilbert de dimensión finita la desigualdad anterior se satisface para cualquier estado separable ρ (Horo 96b, Horo 96c).

Para $\alpha = 2$ la desigualdad entrópica equivale a

$$Tr\left(\rho^2\right) \le \min\ \left\{Tr\left(\rho^{(1)2}\right) Tr\left(\rho^{(2)2}\right)\right\} \Leftrightarrow\ S_L(\rho) \ge \max\ \left\{S_L\left(\rho^{(1)}\right), S_L\left(\rho^{(2)}\right)\right\},$$

donde $S_L(\rho) = 1 - \mathrm{Tr}\left(\rho^2\right)$ es la llamada *entropía lineal* (que varía desde 0 para los estados puros a $(N-1)/N$ para los máximamente desordenados, $\rho = \frac{1}{N}\mathbf{I}$). En general esta condición necesaria de separabilidad es más fuerte que la verificación de las desigualdades de Bell-CHSH, y es mucho más fácil de aplicar.

Para $\alpha = \infty$ la desigualdad entrópica equivale a $\|\rho\| \le \left\|\rho^{(j)}\right\|$, $j = 1, 2$. Para que el estado sea separable el mayor de los autovalores de la matriz densidad total no puede superar al mayor

---

[12] En cambio en el caso cuántico no es así: la entropía total de von Neumann (y en general la entropía de Rényi $S_\alpha(\rho)$) de un sistema compuesto puede ser menor que la de sus componentes, si el estado es enredado (algo que no existe a nivel clásico). La existencia de entropías condicionales negativas en el caso cuántico refleja la no-monotonicidad de la correspondiente entropía cuántica.

[13] Los estados clásicos son siempre separables: las distribuciones conjuntas pueden escribirse siempre como combinaciones convexas de productos de distribuciones (Wer 89).

de los autovalores de las matrices densidad reducidas; de nuevo éste es un criterio muy fácil de aplicar.

Nótese que cuanto mayor sea la pureza del estado total (menor su entropía), más difícil será en general que se cumplan las desigualdades entrópicas. Al aumentar la pureza del estado total disminuye la proporción de estados separables respecto a los enredados (aunque sigue habiendo estados separables incluso para estado total puro); por el contrario, los estados de pureza suficientemente baja (un entorno finito del máximamente desordenado) son todos separables (Zycz 98).

Otra entropía interesante es la de Tsallis,

$$S_q(\rho) = \frac{1}{1-q}\left\{Tr\left(\rho^q\right) - 1\right\} = \frac{1}{1-q}\left\{\sum_j p_j^q - 1\right\}, \quad q > 0,$$

que para q tendiendo a 1 tiende también a la entropía de von Neumann. Esta entropía es subaditiva para $q > 1$ y superaditiva para $q < 1$. Ha sido propuesta para la construcción de estados enredados a partir de principios de máxima entropía y la búsqueda de una descripción de tipo termodinámico del enredo (Abe 99), y para generalizar el índice de correlación o entropía mútua de von Neumann (Vid 99). La entropía de Tsallis ha encontrado también otras aplicaciones (Vid 99).

4. Criterio de reducción

Si el estado es separable, se cumplen las siguientes desigualdades (Horo 97b):

$$\rho^{(1)} \otimes I^{(2)} - \rho \geq 0 \ , \quad I^{(1)} \otimes \rho^{(2)} - \rho \geq 0 .$$

Este criterio de separabilidad es una condición necesaria más fuerte en general que el criterio para la ∞-entropía, con el que coincide si los subsistemas son máximamente desordenados (Horo 97b). Si los dos subconjuntos son de dimensiones 2 y 2, ó 2 y 3, el criterio de reducción equivale al criterio de Peres de positividad de la matriz parcialmente transpuesta que se verá a continuación, pero para dimensiones más altas es más débil que el de Peres (Horo 97b).

5. Positividad de la matriz densidad parcialmente transpuesta

Un operador estado ρ en un espacio de Hilbert de dimensión N es una matriz compleja $N \times N$ autoadjunta, positiva (es decir, con todos sus autovalores mayores o iguales que cero) y de traza unidad. La matriz transpuesta $\rho_{jk}^T = \rho_{kj}$ cumple las mismas restricciones.

Consideremos ahora un sistema compuesto, cuyo espacio de Hilbert sea producto tensorial de espacios de Hilbert de dimensiones M y A . Denotemos con caracteres latinos los índices del primer subsistema, y con griegos los del segundo. El operador estado total es una matriz $N \times N, N = M \cdot A$, de componentes $\rho_{m\alpha,n\beta}$.

Defínase otra matriz $\sigma_{m\alpha,n\beta} = \rho_{n\alpha,m\beta}$ en la que se han transpuesto los índices latinos, pero no los griegos. La matriz parcialmente transpuesta σ es también positiva si el estado total es separable (Per 96a), $\rho_{m\alpha,n\beta} = \sum_k c_k \left(\rho_k^{(1)}\right)_{mn} \left(\rho_k^{(2)}\right)_{\alpha\beta}$. Si ρ no es de esta forma la positividad de σ no está garantizada. Los elementos de matriz de σ dependen de la elección de bases en los espacios de Hilbert de los dos subsistemas, pero sus autovalores, que son los que determinan si σ es positiva o no, son independientes de dicha elección.

La positividad de la matriz parcialmente transpuesta es una condición necesaria (aunque no suficiente en general) para la separabilidad, que usualmente se llama *criterio de Peres*. Puesto que la matriz totalmente transpuesta es positiva, la positividad al transponer sólo los índices del primer subsistema equivale a la positividad al transponer sólo los índices del segundo, aunque las dimensiones de ambos sean distintas.

Para sistemas compuestos por dos subsistemas de dimensión dos, o uno de dimensión dos y otro de tres, se ha probado que la condición anterior es también suficiente para la positividad (Horo 96c). Para dimensiones mayores esto no es cierto en general (Horo 96c). Para dimensiones 3 y 3 ó 2 y 4 se conocen ejemplos explícitos de estados no-separables que sin embargo verifican el criterio de positividad de Peres (Horo 97a, Bru 99).

El criterio de Peres puede extenderse a dimensión infinita (Sim 99), y en la actualidad es prácticamente el único que se utiliza para estados no-puros. El otro criterio que a veces se usa es el de la entropía S_∞, $\|\rho\| \leq \left\|\rho^{(j)}\right\|$, que es menos potente pero todavía más fácil de aplicar.

6. Estados de Werner

Werner (Wer 89) introdujo un estado mezcla para un sistema de dos partículas de espín j: dicho estado admite una descripción en términos de VO Locales que reproduce los resultados de todas las mediciones de von Neumann locales. Sin embargo el estado es no-separable, contiene correlaciones de tipo cuántico y permite violaciones de las desigualdades de Bell para secuencias de mediciones (Pop 95).

El estado original de Werner para dos partículas de espín 1/2 es una mezcla con iguales pesos de estado singlete (no-separable y que viola máximamente las desigualdades de CHSH) y estado totalmente despolarizado (matriz unidad 4x4, producto tensorial de dos matrices unidad 2x2; es decir, separable y con todas las correlaciones nulas). Variando la proporción de las dos contribuciones se puede definir un estado de Werner generalizado como

$$\rho_W = x\,|\,\psi_-\rangle\langle\psi_-\,| + (1-x)\frac{1}{4}\mathbf{I}\ ,\ \ 0 < x < 1\,.$$

Una propiedad interesante de las matrices densidad es la llamada *fidelidad* (Benn 96b), definida como $F = \max\langle\psi|\rho|\psi\rangle$, donde el máximo se toma sobre todos los estados máximamente enredados. Para el estado de Werner la fidelidad es su fracción de singletes, $F = \langle\psi_-|\rho_W|\psi_-\rangle = (1+3x)/4$ (la parte no-polarizada puede ponerse como una mezcla de 1/4 de singletes y 1/4 de cada una de las tres componentes del triplete, con lo que $F = x + (1-x)/4$).

El estado de Werner puede utilizarse para comparar diversas condiciones necesarias de separabilidad (Per 96a). Las desigualdades de CHSH se verifican si $x < \frac{1}{\sqrt{2}} = 0{,}707$. La desigualdad para la entropía de Rényi S_2 se satisface si $x < \frac{1}{\sqrt{3}} = 0,577$, y para la S_∞ si $x < 1/3$. El criterio de reducción de Horodecki y el de positividad de la matriz parcialmente transpuesta de Peres se satisfacen si $x < 1/3$. Las tres últimas condiciones necesarias coinciden pues en este caso, aunque el criterio de Peres es en general más fuerte que los otros dos. La condición $x < 1/3$ es también suficiente para la separabilidad, ya que si se cumple es posible escribir ρ_W como una mezcla de estados producto $|\uparrow\uparrow\rangle$, $|\uparrow\downarrow\rangle$, $|\downarrow\uparrow\rangle$, $|\downarrow\downarrow\rangle$ (Benn 96a).

En resumen: si el peso x del singlete en el estado de Werner generalizado es $x < 1/3$ (fidelidad $F < \frac{1}{2}$), el estado es separable; por el contrario, si $x > \frac{1}{3}$ el estado es no-separable y contiene correlaciones cuánticas [14]. El estado original de Werner, $x = \frac{1}{2}$, queda en la región de no-separabilidad, y de ahí sus propiedades no-clásicas, aunque satisfaga las desigualdades de CHSH y de las de las α-entropías S_1 y S_2.

C. Estimaciones y clasificaciones del enredo

Se han propuesto diversas estimaciones del enredo, como el *enredo de formación* $E_F(\rho)$ y el *enredo de destilación* $E_D(\rho)$ (Benn 96b). El enredo de formación $E_F(\rho)$ se define como el número mínimo de singletes necesarios para producir el estado ρ por medio de operaciones LQCC (iniciales de *Local Quantum* operations and *Classical Communication*). El enredo de destilación $E_D(\rho)$ es el número máximo de singletes que pueden obtenerse a partir del estado ρ mediante operaciones LQCC.

Cuando el estado total es puro, ambas medidas coinciden entre si y con la *entropía de enredo* E_E (entropía de von Neumann de cualquiera de los dos estados reducidos). Para estados puros esta es la única medida razonable del enredo (Pop 97). Para el caso general de estados mezcla puede probarse (Horo 99) que cualquier otra medida del enredo <u>que satisfaga ciertos axiomas razonables</u> está comprendida entre las dos primeras, $E_D \le E \le E_F$. Pero también puede probarse que todas las medidas del enredo que coincidan con la entropía de enredo E_E sobre estados puros, o bien son equivalentes, o inducen distintas ordenaciones del enredo (Vir 99). Así, o bien E_D y E_F son equivalentes, o el hecho de que $E_D(\rho) < E_D(\sigma)$ no implica necesariamente que $E_F(\rho) < E_F(\sigma)$, en contra del resultado de Horodecki.

La anulación de una o varias de estas medidas del enredo no es suficiente para la separabilidad. Existen estados no-separables que tienen $E_D(\rho) = 0$; estos estados se llaman *no-destilables*, y poseen un tipo de enredo ligado (*bound entanglement*) que no puede ser aprovechado para la transmisión de información cuántica (Horo 98). Los estados no-separables que satisfacen el criterio de Peres (transposición parcial positiva, PPT) son de este tipo (Bru 99), e incluso algunos que lo violan (transposición parcial negativa, NPT) pueden tener también enredo ligado (DiVin 99). Para dos subsistemas de dimensión dos, o uno de dimensión dos y otro de tres, no existen estados con enredo ligado [15]. Se ha conjeturado que los estados con

[14] Éste es un ejemplo concreto de la complementariedad genérica entre pureza y separabilidad que cité antes (Zycz 98); a mayor pureza, más dificil es que el estado sea separable.

[15] En estos casos la condición necesaria de Peres es también suficiente para la separabilidad, y la división es clara: los estados PPT son separables, y los NPT enredados con enredo destilable (DiVin 99).

enredo ligado satisfacen las desigualdades de Bell y admiten una descripción en términos de VO Locales (Per 99b), pero esto no ha sido demostrado (ni rechazado). Si la conjetura fuera cierta, la frontera entre el comportamiento clásico y el cuántico se establecería no entre los estados separables y los no-separables, sino entre los estados con enredo ligado y con enredo destilable.

Por otro lado, no todas las aplicaciones cuánticas son igualmente exigentes por lo que se refiere al enredo. Así, la teleportación cuántica sigue siendo posible con cantidades de enredo tan pequeñas que hacen imposible la codificación densa (Bose 99).

Un campo de estudio reciente es el de las *transformaciones de enredo,* es decir, determinar qué estados enredados son transformables entre si mediante operaciones LQCC. Para sistemas con dos partes y estado total puro, existen condiciones necesarias y suficientes para que tal transformación sea posible (Niel 99). Para estados mezcla no se conoce un resultado equivalente.

En conclusión: la determinación precisa de la frontera entre el comportamiento puramente cuántico y el clásico [16], y la clasificación y cuantificación del enredo siguen siendo problemas no completamente resueltos si el estado total es mezcla. Sin embargo, se conocen un gran número de resultados parciales, suficientes en muchos casos para las aplicaciones prácticas.

IV. MECÁNICA CUÁNTICA Y VARIABLES OCULTAS NO-CONTEXTUALES

A. Planteamiento

Un tipo importante de VO son las *No-Contextuales*, en las que el valor v(A) correspondiente a un observable A en un sistema individual no depende de qué otros valores de observables compatibles con A se consideren conjuntamente (v(A) es independiente del *contexto*). El concepto de no-contextualidad incluye como caso particular el de localidad.

Consideremos por ejemplo un sistema de dos partículas de espín 1/2. Los valores ocultos para las componentes z de espín de las dos partículas en un sistema individual dado, v($S_z^{(1)}$), v($S_z^{(2)}$), coinciden con los resultados que se obtendrían si $S_z^{(1)}$, $S_z^{(2)}$ se midiesen conjuntamente en dicho sistema individual. Si las VO son No-Contextuales, el valor v($S_z^{(1)}$) no depende de que se considere conjuntamente con v($S_z^{(2)}$), con v($S_x^{(2)}$), o con el valor de cualquier otra componente de espín de la partícula 2. A diferencia de la localidad, la no-contextualidad no exige que las dos partículas estén espacialmente separadas, pero si lo están y el sistema se encuentra en un estado máximamente enredado, los valores v($S_{\mathbf{n}}^{(j)}$) pueden ser además Elementos de Realidad de EPR en sentido débil (Háj 92, Cab 97).

Encadenando conjuntos completos de proposiciones compatibles es posible demostrar que las VO No-Contextuales no son consistentes con la QM, lo que constituye el llamado Teorema BKS (Mer 93), en honor de Bell (Bell 66), y Kochen y Specker (Koch 67). La demostración original de Kochen y Specker utilizaba 117 vectores en dimensión 3 (a cada vector

[16] Entendiendo posiblemente por tal no sólo los estados que contienen únicamente correlaciones clásicas (es decir, son separables), sino todos los describibles mediante VO Locales, que podrían incluir los estados con enredo ligado.

le corresponde un proyector unidimensional, que representa una proposición compatible con las correspondientes a vectores ortogonales). La demostración más económica de este tipo conocida hasta el momento utiliza sólo 18 vectores en dimensión 4 (Cab 96). Las proposiciones para cada conjunto de vectores ortogonales (tríos en dimensión 3, cuartetos en dimensión 4, etc.) son mutuamente compatibles, pero no son en general compatibles con las de otros conjuntos. Aunque la incompatibilidad matemática de las dos teorías queda pues probada, no es posible una comprobación experimental del conjunto total de predicciones de una y otra.

La utilización de estados enredados permite una demostración de la incompatibilidad entre QM y VO No-Contextuales de nuevo tipo, utilizando sólo cuatro observables compatibles en dimensión 4 (Cab 98). Ello abre por primera vez la posibilidad de una comprobación experimental de las respectivas predicciones.

Consideremos los siguientes observables físicos para un sistema de dos partículas de espín 1/2 (sigo tomando $\hbar = 1$):

$$A = 2S_z^{(1)},\ B = 2S_z^{(2)},\ a = 2S_x^{(1)},\ b = 2S_x^{(2)}.$$

así como los observables conjuntos AB, Ab, aB, ab. Los observables AB y ab son compatibles (la compatibilidad de dos observables obedece a criterios experimentales, en concreto a poder medirlos conjuntamente; en el caso de AB y ab esto no es fácil, pero no es imposible en principio). También son compatibles Ab y aB. Puedo pues definir las siguientes proposiciones

$$P_1 : AB = 1,\ ab = 1, \quad P_2 : AB = -1,\ ab = -1,$$
$$P_3 : Ab = 1,\ aB = 1, \quad P_4 : Ab = -1,\ aB = -1.$$

La proposición P_1 tiene el valor 1 (es cierta), si al medir la pareja de observables compatibles AB, ab ambos resultados son +1, y el valor 0 (es falsa) en cualquier otro caso; análogamente las otras tres.

B. Contradicción

Hasta aquí el planteamiento se ha hecho en términos de observables físicos, sin intervención de ninguna de las dos teorías. A continuación voy a analizar las predicciones que las VO y la QM hacen para las proposiciones anteriores.

En una teoría de VO, observables no-compatibles como A y a pueden tener valores (ocultos) simultáneamente bien definidos. Más aun: en dimensión 2 (que es el caso para cada uno de nuestros subsistemas), existen modelos de VO deterministas que reproducen todas las predicciones de la QM (Bell 66).

En nuestro ejemplo cada uno de los valores $\mathrm{v}(A), \mathrm{v}(a), \mathrm{v}(B), \mathrm{v}(b)$ puede ser ± 1. Si las VO son No-Contextuales, el valor $\mathrm{v}(A)$ no depende de que se considere conjuntamente con $\mathrm{v}(B)$ o con $\mathrm{v}(b)$; lo mismo ocurre con $\mathrm{v}(a)$. Los valores ocultos para los observables producto, $\mathrm{v}(AB)$, $\mathrm{v}(ab)$, etc. (también ±1), serán los productos de los correspondientes valores ocultos para cada partícula (una posible forma de medir AB es medir A y B por separado en sus respectivos subsistemas y multiplicar los resultados),

$$\mathrm{v}(AB) = \mathrm{v}(A)\,\mathrm{v}(B), \quad \mathrm{v}(Ab) = \mathrm{v}(A)\,\mathrm{v}(b),$$

$$\mathrm{v}(aB) = \mathrm{v}(a)\,\mathrm{v}(B), \quad \mathrm{v}(ab) = \mathrm{v}(a)\,\mathrm{v}(b),$$

donde el mismo valor $\mathrm{v}(A)$ aparece en la primera y segunda ecuación, el mismo $\mathrm{v}(B)$ en la primera y tercera, etc..

El valor oculto de la proposición P_1 es $\mathrm{v}(P_1)=1$ si $\mathrm{v}(AB)=\mathrm{v}(ab)=1$, $\mathrm{v}(P_1)=0$ en cualquier otro caso; análogamente las otras tres proposiciones. Podemos resumir estos resultados poniendo

$$\begin{aligned}
\mathrm{v}(P_1) &= (1+\mathrm{v}(AB))\,(1+\mathrm{v}(ab))/4 \\
\mathrm{v}(P_2) &= (1-\mathrm{v}(AB))\,(1-\mathrm{v}(ab))/4 \\
\mathrm{v}(P_3) &= (1+\mathrm{v}(Ab))\,(1+\mathrm{v}(aB))/4 \\
\mathrm{v}(P_4) &= (1-\mathrm{v}(Ab))\,(1-\mathrm{v}(aB))/4
\end{aligned}$$

Sumando estas cuatro expresiones se obtiene

$$\begin{aligned}
\mathrm{v}(P_1)+\mathrm{v}(P_2)+\mathrm{v}(P_3)+\mathrm{v}(P_4) &= 1+\mathrm{v}(AB)\mathrm{v}(ab)/2+\mathrm{v}(Ab)\mathrm{v}(aB)/2 = \\
&= 1+\mathrm{v}(A)\mathrm{v}(B)\mathrm{v}(a)\mathrm{v}(b) = 1\pm 1
\end{aligned}$$

En una teoría de VO No-Contextuales, la suma de las cuatro proposiciones es siempre cero o dos; es decir, las cuatro proposiciones son falsas, o dos son ciertas y dos falsas. De hecho, si se escriben explícitamente las 16 combinaciones posibles de valores ± 1 para $\mathrm{v}(A), \mathrm{v}(B), \mathrm{v}(a), \mathrm{v}(b)$, se comprueba que en 8 casos las cuatro proposiciones son falsas, y en los otros 8 casos dos son ciertas y dos falsas.

Paso ahora a la descripción cuántica. En QM, los observables físicos vienen representados por operadores autoadjuntos y las proposiciones en particular por proyectores unidimensionales. En nuestro caso,

$$A \to \sigma_z^{(1)},\ B \to \sigma_z^{(2)},\ a \to \sigma_x^{(1)},\ b \to \sigma_x^{(2)},$$

$$AB \to \sigma_z^{(1)} \otimes \sigma_z^{(2)},\ \ ab \to \sigma_x^{(1)} \otimes \sigma_x^{(2)},\ \ Ab \to \sigma_z^{(1)} \otimes \sigma_x^{(2)},\ \ aB \to \sigma_x^{(1)} \otimes \sigma_z^{(2)},$$

$$P_j \to |\psi_j\rangle\langle\psi_j|\,,\ j = 1,..4\,,$$

donde el estado representado por el vector $|\psi_1\rangle$ es tal que al medir en él los observables compatibles *AB*, *ab,* se obtengan con certeza sendos valores +1 (definición de la proposición P_1), lo que en QM corresponde a ser autoestado de los operadores correspondientes con autovalores +1; los otros tres vectores se definen de forma similar. Es decir, los vectores $|\psi_j\rangle$ satisfacen,

$$\sigma_z^{(1)} \otimes \sigma_z^{(2)} |\psi_k\rangle = -(-1)^k\,|\psi_k\rangle\,, \quad \sigma_x^{(1)} \otimes \sigma_x^{(2)} |\psi_k\rangle = -(-1)^k\,|\psi_k\rangle, \quad k = 1, 2\,,$$

$$\sigma_z^{(1)} \otimes \sigma_x^{(2)} |\psi_n\rangle = -(-1)^n\,|\psi_n\rangle\,, \quad \sigma_x^{(1)} \otimes \sigma_z^{(2)} |\psi_n\rangle = -(-1)^n\,|\psi_n\rangle, \quad n = 3, 4\,.$$

Los vectores $|\psi_j\rangle$ resultan ser estados enredados, emparentados con los de la base de Bell que se utilizan en los estudios de teleportación cuántica. Los estados de Bell se definen como

$$|\phi_\pm\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left\{|\uparrow\uparrow\rangle \pm |\downarrow\downarrow\rangle\right\},\ |\psi_\pm\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left\{|\uparrow\downarrow\rangle \pm |\downarrow\uparrow\rangle\right\},$$

y son autoestados de la pareja de observables compatibles *AB*, *ab,* con las cuatro combinaciones posibles de pares de autovalores ± 1 ($|\phi_+\rangle = |1, 1\rangle$, $|\phi_-\rangle = |1, -1\rangle$, $|\psi_+\rangle = |-1, 1\rangle$, $|\psi_-\rangle = |-1, -1\rangle$).

En la base de Bell los vectores $|\psi_j\rangle$ son

$$|\psi_1\rangle = |\phi_+\rangle,\ |\psi_2\rangle = |\psi_-\rangle,\ |\psi_3\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left\{|\psi_+\rangle + |\phi_-\rangle\right\},\ |\psi_4\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left\{|\psi_+\rangle - |\phi_-\rangle\right\}$$

Es inmediato comprobar que los $|\psi_j\rangle$ forman también una base, y que los proyectores correspondientes constituyen una resolución espectral de la identidad,

$$\langle\psi_j|\psi_k\rangle = \delta_{jk} \quad , \quad \sum_j |\psi_j\rangle\langle\psi_j| = \mathbf{I}\,.$$

Según la QM las cuatro proposiciones P_j son compatibles (vienen representadas por proyectores sobre vectores mutuamente ortogonales, que por tanto conmutan), pero el primer par de vectores son autoestados de los observables *AB*, *ab*, que no son compatibles con los *Ab*, a*B* de los cuales son autoestados el segundo par. Esta es una diferencia esencial con los estados de la base de Bell, que eran los cuatro autoestados del par de observables *AB*, *ab*.

Los proyectores unidimensionales que representan a las proposiciones P_j constituyen una resolución espectral de la identidad. Según el formalismo de la QM, al medir simultáneamente las cuatro proposiciones en un estado cualquiera (puro o mezcla) uno de los resultados será 1 (proposición cierta) y los otros tres 0 (proposiciones falsas).

La predicción cuántica (una proposición cierta y tres falsas) está en total contradicción con la predicción de VO (las cuatro proposiciones falsas, o dos ciertas y dos falsas), cualquiera que sea el estado del sistema.

C. Comentarios

He sido cuidadoso en distinguir los observables físicos (propiedades susceptibles de medición experimental en un sistema individual; en nuestro caso componentes de espín o proposiciones), A, a,.. AB,.. P_j, de sus valores correspondientes en una teoría de VO No-Contextuales, $\mathrm{v}(A)$, $\mathrm{v}(a)$,.. $\mathrm{v}(AB)$,.. $\mathrm{v}(P_j)$, y de su representación en QM por operadores autoadjuntos, $\sigma_z^{(1)}$, $\sigma_x^{(1)}$,.. $\sigma_z^{(1)} \otimes \sigma_z^{(2)}$,.. $|\psi_j\rangle\langle\psi_j|$. En concreto, la predicción de VO se ha obtenido sin ninguna referencia a la QM utilizando sólo: (i) en dimensión 2 es posible asignar valores de VO a todos los observables de manera que sean consistentes con los resultados experimentales (Bell 66); (ii) la hipótesis de no-contextualidad para dichos valores.

Las demostraciones usuales del teorema BKS suponen (Per 91) que las VO satisfacen $\sum_j \mathrm{v}(P_j) = 1$. Acabamos de ver que esto no siempre se cumple para sistemas compuestos. En este sentido la nueva contradicción puede considerarse más fundamental, puesto que exige menos hipótesis sobre las VO que el teorema BKS (Mer 93). A cambio, la contradicción expresada en el teorema BKS se manifiesta también en sistemas de una sola partícula y no sólo en sistemas compuestos. La nueva incompatibilidad no reemplaza sino que complementa el teorema BKS.

Para establecer la contradicción se ha utilizado la base de estados enredados $\{|\psi_j\rangle\}$. Es fácil convencerse de que tal contradicción no existiría si se utilizasen estados factorizables. Una vez más, el enredo es esencial en la oposición entre QM y VO. Sin embargo, el que los cuatro estados sean enredados no es suficiente: con los estados de la base de Bell no existe esta contradicción.

Las cuatro proposiciones P_j deben poder medirse simultáneamente, aunque en la práctica todavía no se haya logrado. Esto abre por primera vez la posibilidad de descartar las VO No-Contextuales a partir de resultados experimentales [17]. Una medición inambigua de las proposiciones P_j cuyos resultados contradigan la predicción de VO que vimos previamente rechazará cualquier teoría de VO No-Contextuales para sistemas compuestos por dos subsistemas de dimensión dos [18].

V. CONCLUSIÓN

En las secciones I y III he comentado cómo el enredo está en la base de las contradicciones de la QM con las VO Locales y las VO No-Contextuales, y en la sección II he esbozado algunas formas de identificarlo. Muchas otras cosas podrían decirse acerca de la importancia teórica y las aplicaciones prácticas del enredo cuántico, pero restricciones de espacio y tiempo, y la conveniencia de minimizar el solapamiento con otras contribuciones a este mismo número monográfico, me obligan a terminar. Confío en que esta breve ojeada sobre el tema haya sido suficiente para despertar el interés del lector.

REFERENCIAS

(Abe 99) S. Abe and A. K. Rajagopal, Quantum entanglement inferred by the principle of maximun Tsallis entropy, Los Alamos e-print archive, quant-ph/9904088 (1999).

(Ara 70) H. Araki and E. Lieb, Commun. Math. Phys. **18**, 160 (1970).

(Ball 87) L. E. Ballentine and J. P. Jarret, Am. J. Phys. **55**, 696 (1987).

(Ball 90) L. E. Ballentine, *Quantum Mechanics*, Prentice Hall 1990. Revisado y ampliado como *Quantum Mechanics: a Modern Development*, World Scientific Pub. 1998.

[17] Todos los experimentos realizados hasta ahora contrastan las predicciones de las VO Locales; la localidad es una clase especial de no-contextualidad, la más "inevitable" desde el punto de vista físico.

[18] Y no sólo aquellas teorías que comparten algunas propiedades con la QM, como hace el teorema BKS.

(Barn 91) S. Barn and S. J. D. Phoenix, Phys. Rev. A **44**, 535 (1991).

(Belin 73) F. J. Belinfante, *A survey of Hidden Variables Theories*, Pergamon Press 1973

(Bell 64) J. S. Bell, Physics **1**, 195 (1964), reimpreso traducido en (Bell 90).

(Bell 66) J. S. Bell, Rev. Mod. Phys. **83**, 447 (1966), reimpreso traducido en (Bell 90).

(Bell 71) J. S. Bell, p. 171 de *Foundations of Quantum Mechanics*, ed. B. d'Espagnat, Academic Press 1971, reimpreso traducido en (Bell 90).

(Bell 90) J. S. Bell, *Lo decible y lo indecible en mecánica cuántica*, Alianza Editorial 1990.

(Benn 92a) C. H. Bennett and S. J. Wiesner, Phys. Rev. Lett. **69**, 2881 (1992).

(Benn 92b) C. H. Bennett,.G. Brassard and A. K. Ekert, Sci. Am., October 1992, 26 (1992).

(Benn 93) C. H. Bennett, G. Brassard, C. Crépeau, R. Jozsa, A. Peres and W. K. Wooters, Phys. Rev. Lett. **70**, 1895 (1993).

(Benn 95) C. H. Bennett, Physics Today **48**, October 1995, 24 (1995).

(Benn 96a) C. H. Bennett, G. Brassard, S. Popescu, B. Schumacher, J. Smolin and W. K. Wootters, Phys. Rev. Lett. **76**, 722 (1996), errata en **78**, 2031 (1997).

(Benn 96b) C. H. Bennett, D. P. Di Vincezo, J. Smolin and W. K. Wootters, Phys. Rev. A **54**, 3824 (1996).

(Bohm 52) D. Bohm, Phys. Rev. **85**, 166 & 180 (1952)

(Boll 96) J. J. Bollinger, W. M. Itano, D. J. Wineland and D. J. Heinzen, Phys. Rev. A **54**, R4649 (1996).

(Bose 99) S. Bose and V. Vedral, Mixedness and teleportation, Los Alamos e-print archive, quant-ph/9912033.

(Boto 99) A. N. Boto, D. S. Abrams, C. P. Willians and J. P. Dowling, Quantum interferometric optical lithography: exploiting entanglement to beat the diffraccion limit, Los Alamos e-print archive, quant-ph/9912052.

(Brau 90) S. L. Braunstein and C. M. Caves, Annals of Physics **202**, 22 (1990).

(Brau 92) S. L. Braunstein, A. Mann and M Revzen, Phys. Rev. Lett. **68**, 3259 (1992).

(Brau 98) S. L. Braunstein and H. J. Kimble, Phys. Rev. Lett. **80**, 869 (1998).

(Brau 99) S. L. Braunstein and H. J. Kimble, Dense coding for continuous variables, Los Alamos e-print archive, quant-ph/9910010.

(Brieg 98) H. J. Briegel, W. Dur, J. I. Cirac and P. Zoller, Quantum repeaters for communication, Los Alamos e-print archive, quant-ph/9803056.

(Buck 99) J. R. Buck, S. J. van Enk and C. Fuchs, Experimental Proposal for Achieving Superadditive Communication Capacities with a Binary Quantum Alphabet, Los Alamos e-print archive, quant-ph/9903039.

(Bru 99) D. Bruß and A. Peres, Construction of quantum states with bound entanglement, Los Alamos e-print archive, quant-ph/9911056.

(Buhr 99) H. Buhrman, W. van Dam, P. Hoyer and A. Tapp, Multiparty Quantum Communication Complexity, Los Alamos e-print archive, quant-ph/9710054 v2 (3 Jun 99).

(Cab 96) A. Cabello, J.M. Estebaranz and G. García-Alcaine, Phys. Lett. A **212**, 183 (1996).

(Cab 97) A. Cabello and G. García-Alcaine, J. Phys. A **30**, 725 (1997).

(Cab 98) A. Cabello and G. García-Alcaine, Phys. Rev. Lett. **80**, 1797 (1998).

(Clau 69) J. F. Clauser, M. A. Horne, A. Shimony and R. A. Holt, Phys. Rev. Lett. **23**, 880 (1969).

(Clau 78) J. F. Clauser and A. Shimony, Rep. Prog. Phys. **41**, 12 (1978).

(Cleve 97) R. Cleve and H. Buhrman, Phys. Rev. A **56**, 1201 (1997)

(d'Esp 79) B. d'Espagnat, Sci. Am., November 1979, 128 (1979)

(Deut 98) D. Deutsch and A. Ekert, Physics World, March 1998, 47 (1998).

(DiVin 95) D. P. DiVincenzo, Science **270**, 255 (1995).

(DiVin 99) D. P. DiVincenzo, P. W. Shor, J. A. Smolin, B. M. Terhal and A. V. Thapliyal, Evidence for Bound Entangled States With Negative Partial Transposition, Los Alamos e-print archive, quant-ph/9910026 v2.

(Eins 35) A. Einstein. B. Podolsky and N. Rosen, Phys Rev **46,** 777 (1935).

(Ekert 91) A. K. Ekert, Phys. Rev. Lett. **67**, 661 (1991).

(Furu 98) A. Furusawa, J. L. Sorensen, S. L. Braunstein, C. Fuchs, H. J. Kimble and E. S. Polzik, Science **282**, 706 (1998).

(Gal 00) A. Galindo, en este número de la Revista Española de Física.

(Gar 87) G. García-Alcaine y G. Álvarez, Revista Española de Física **1**, nº 2, 29 (1998).

(Gar 98) G. García-Alcaine, Revista Española de Física **12**, nº 1, 6 (1998).

(Garg 87) A. Garg, Phys. Rev. D **35**, 3831 (1987).

(Gerry 96) C. C. Gerry, Phys. Rev. A **53**, 4583 (1996).

(Gis 92) N. Gisin and A. Peres, Phys. Lett. A **162**, 15 (1992).

(Gis 99) N. Gisin and B. Gisin, A local hidden variable model of quantum correlations exploiting the detection loophole, Los Alamos e-print archive, quant-ph/9905018.

(Gold 98) S. Goldstein, Physics Today, April 1998, 38 (1998).

(Green 90) D. M. Greenberger, M.A. Horne, A, Shimony and A. Zeilinger, Am. J. Phys. **58**, 1131 (1990).

(Green 93) D. M. Greenberger, M.A. Horne and A. Zeilinger, Physics Today, August 1993, 22 (1993).

(Har 92) L. Hardy, Phys. Rev. Lett. **68**, 2981 (1992).

(Horo 95) M. Horodecki, P. Horodecki and R. Horodecki, Phys. Lett. A **200**, 340 (1995).

(Horo 96a) M. Horodecki, P. Horodecki and R. Horodecki, Phys. Lett. A **210**, 377 (1996).

(Horo 96b) R. Horodecki, and M. Horodecki, Phys. Rev. A **54**, 1838 (1996)

(Horo 96c) M. Horodecki, P. Horodecki and R. Horodecki, Phys. Lett. A **223**, 1 (1996)

(Horo 97a) P. Horodecki, Phys. Lett. A **232**, 333 (1997)

(Horo 97b) M. Horodecki and P. Horodecki, Reduction criterion of separability and limits for a class of protocols of entanglement distillation, Los Alamos e-print archive, quant-ph/9708015

(Horo 98) M. Horodecki, P. Horodecki and R. Horodecki, Phys. Rev. Lett. **80**, 5239 (1998)

(Horo 99) M. Horodecki, P. Horodecki and R. Horodecki, Limits for entangled measures, Los Alamos e-print archive, quant-ph/9908065.

(Kar 95) G. Kar, Phys. Lett. A **204,** 99 (1995).

(Kim 99) Yoon-Ho Kim, R. Yu, Y. H. Shih and M. O. Scully, A delayed Choice Quantum Eraser, Los Alamos e-print archive, quant-ph/9903047.

(Koch 67) S. Kochen and E. Specker, J. Math. Mech. **17**, 59 (1967).

(Lars 98) J. Larsson, Phys. Rev. A **57**, R3145 (1998).

(Lars 99) J. Larsson, Modeling the Singlet State with Local Variables, Los Alamos e-print archive, quant-ph/9901074.

(Mer 90a) N. D. Mermin, Am. J. Phys. **58**, 731 (1990).

(Mer 90b) N. D. Mermin, Phys. Rev. Let. **65**, 3373 (1990).

(Mer 93) N. D. Mermin, Rev. Mod. Phys. **65**, 803 (1993).

(Mer 94) N. D. Mermin, Am. J. Phys. **62**, 880 (1994).

(Mer 98) N. D. Mermin, Am. J. Phys. **66**, 920 (1998).

(Mer 99) N. D. Mermin, Found. Phys. **29**, 571 (1999).

(Mig 99) A. Migdall, Physics Today, January 1999, 41 (1999).

(Niel 99) M. A. Nielsen, Phys. Rev. Lett. **83**, 436 (1999).

(Per 90) A. Peres, Phys. Lett. A **151**, 107 (1990).

(Per 93) A. Peres, *Quantum Theory: Concepts and Methods,* Kluwer Academic 1993, reimpresión con correcciones 1995.

(Per 96a) A. Peres, Phys. Rev. Lett. **77**, 1413 (1996).

(Per 96b) A. Peres, Phys. Rev. A **54**, 2685 (1996)

(Per 99a) A. Peres, Bayesian Analysis of Bell Inequalities, Los Alamos e-print archive, quant-ph/9905084.

(Per 99b) A. Peres, Found. Phys. **29**, 589 (1999).

(Pop 94) S. Popescu, Phys. Rev. Lett. **72**, 797 (1994)

(Pop 95) S. Popescu, Phys. Rev. Lett. **74**, 2619 (1995)

(Pop 97) S. Popescu and D. Rohrlich, Phys. Rev. A **56**, R3319 (1997).

(Ryff 97) L. C. Ryff, Am. J. Phys. **65**, 1197 (1997).

(Roy 89) S. M. Roy and V. Singh, Phys. Lett. A **139**, 437 (1989).

(Roy 91) S. M. Roy and V. Singh, Phys. Rev. Lett. **67**, 2761 (1991).

(Roy 93) S. M. Roy and V. Singh, Phys. Rev. A **48**, 3379 (1993).

(Sas 98) M. Sasaki, K. Kato, M. Izutsu and O. Hirota, Phys. Rev. A **58**, 146 (1998).

(Schr 35) E. Schrödinger, Naturwissenschafen **23**, 807, 823 y 844 (1935). Reimpreso en inglés en J. A. Wheeler and W. Zurek, *Quantum Theory of Measurement,* Princeton Univ. Press 1983.

(Sell 90) F. Selleri, *Quantum Paradoxes and Physical Reality*, Kluwer Academic Pub. 1990.

(Shor 95) P. Shor, Phys. Rev. A **52**, R2493 (1995).

(Sim 99) R. Simon, Peres-Horodecki separability criterion for continuous variable systems, Los Alamos e-print archive, quant-ph/9909044.

(Stea 96) A. M. Steane, Phys. Rev. Lett. **77**, 793 (1996).

(Stea 98) A. M. Steane, Rep. Prog. Phys. **61**, 117 (1998).

(Thir 83) W. Thirring, *Quantum Mechanics of Large Systems*, *A Course in Mathematical Physics*, vol 4, Springer-Verlag 1983

(Titt 98) W. Tittel, G. Ribordy and N. Gisin, Physics World, March 1998, 41 (1998).

(Unruh 99) W. Unruh, Phys. Rev. A **59**, 126 (1999).

(Vaid 94) L. Vaidman, Phys. Rev. A **49**,1473 (1994).

(Vaid 98) L. Vaidman, Teleportation: Dream or Reality?, Los Alamos e-print archive, quant-ph/9810089.

(Vaid 99a) L. Vaidman and N. Yoran, Phys. Rev. A **59**,116 (1999).

(Vaid 99b) L. Vaidman, Found. Phys. **29**, 615 (1999).

(vdMer 88) A. van der Merwe, F. Selleri and G. Tarozzi, *Microphysical Reality and Quantum Formalism*, vol 2, Kluwer Academic Pub. 1988.

(vEnk 99) S. J. van Enk, Phys. Rev. A **60**, 5095 (1999).

(Vid 99) A. Vidiella-Barranco, Entanglement and nonextensive statistics, Los Alamos e-print archive, quant-ph/9909057.

(Vir 99) S. Virmani and M. B. Plenio, Ordering States with Entanglement Measures, Los Alamos e-print archive, quant-ph/9911119.

(Wehrl 78) A. Wehrl, Rev. Mod. Phys. **50**, 221 (1978).

(Wer 89) R. F. Werner, Phys. Rev. A **40**, 4277 (1989).

(Whit 98) A. Whitaker, Physics World, December 1998, 29 (1998).

(Win 92) D. J. Wineland, J. J. Bollinger, W. M. Itano, F. L. Moore and D. J. Heinzen, Phys. Rev A **46**, R6797 (1992).

(Win 94) D. J. Wineland, J. J. Bollinger, W. M. Itano and D. J. Heinzen, Phys. Rev A **50**, 67 (1994).

(Yur 92a) B. Yurke and D. Stoler. Phys. Rev. A **46**, 2229 (1992).

(Yur 92b) B. Yurke and D. Stoler. Phys. Rev. Lett. **68**, 1251 (1992).

(Zei 98) A. Zeilinger, Physics World, March 1998, 35 (1998).

(Zei 99) A. Zeilinger, Rev. Mod. Phys. **71**, s288 (1999).

(Zuk 93) M. Zukowski, A. Zeilinger, M. A. Horne and A. E. Eckert, Phys. Rev. Lett. **26**, 4287 (1993).

(Zuk 99a) M. Zukowski and D. Kaszlikowski, Critical visibility for N-particle GHZ correlations to violate local realism, Los Alamos e-print archive, quant-ph/9910045.

(Zuk 99b) M. Zukowski, Bell Theorem for Nonclassical Part of Quantum Teleportation Process, Los Alamos e-print archive, quant-ph/9912029.

(Zycz 98) K. Zyczkowski, P. Horodecki, A. Sanpera and M. Lewenstein, Phys. Rev. A **58**, 883 (1998).